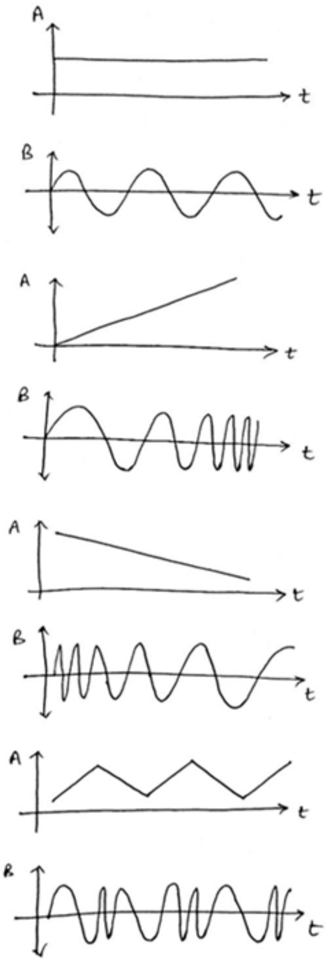
SOLUTIONS

Exercice 1

L'entrée du VCO (A) est la tension qui dépend de la fréquence du signal d'entrée.

La sortie du VCO (B) est une onde oscillante dont la fréquence est directement proportionnelle à la tension d'entrée du VCO.



i) Tension constante

Fréquence constante

ii) Tension croissante(rampe)

Fréquence croissante

iii) Tension décroissante

Fréquence décroissante

iv) Tension triangulaire

Fréquence croissante & décroissante

Exercice 2

$\Delta f_{OUT} = \Delta V_O \, K_O$ ➔ $\Delta f = (0.8\ V)\ (2.5\ kHz/V) = 2\ kHz$

Note : Faites attention toujours aux unités de Ko et si la sortie du VCO est considérée pulsation ou fréquence car Ko peut être exprimé dans les exercices en rad/V·s ou Hz/V. Par exemple, si dans cette exercice Ko aurait été donnée en rad/ V· s, il aurait dû être divisée par 2π dans le calcul de Δf_{OUT}. Voir aussi note ex. 5.

Exercice 3

Ko = 2π x (1.2 MHz – 380 KHz) / (4.5V – 1.6V) = 1.777 Mrad/V·s (≈282.8 kHz/V).

Exercice 4

$V_D = K_D\, \Phi e = (0.5\ V/rad)(0.75\ rad) = 0.375\ V$

Exercice 5

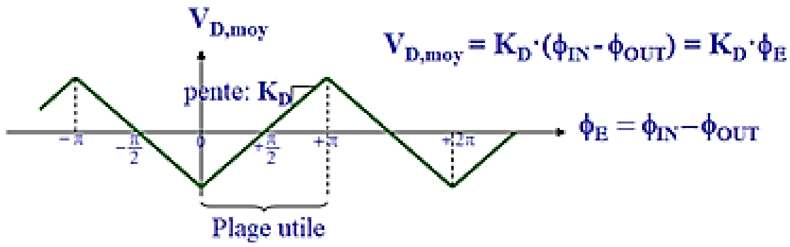
Note : Attention à la conversion du Ko en fonction des unités (info utile pout Ex 2 aussi)

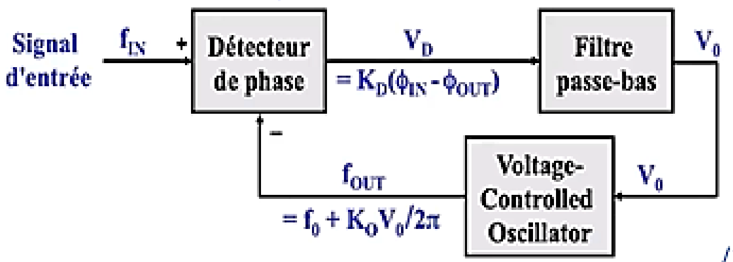
- Sensibilité VCO (en fréquence) : $K_{0f} = 30\ \mathrm{kHz/V} = 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{Hz/V}$

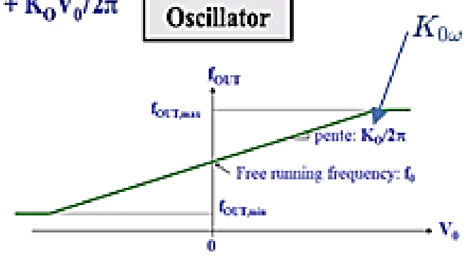
  Conversion (VCO en rad/(V·s)) :

$$K_{0\omega} = 2\pi\, K_{0f} = 2\pi \times 3{,}0 \times 10^4 \approx 1{,}88495 \times 10^5\, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{V\,s}}$$

> Repères :
> – Modèle « fréquence » : $\Delta f_{\mathrm{out}} = K_{0f}\, V_0$
> – Modèle « pulsation » : $\Delta\omega_{\mathrm{out}} = K_{0\omega}\, V_0$ avec $\Delta\omega = 2\pi\, \Delta f$







(a) Gain de boucle ouverte H_{ol}

La **constante DC** (produit des gains, côté fréquence) vaut :

$$H_{ol,f} = K_D\, K_f\, K_{0f} \quad [\mathrm{Hz/rad}] = 0{,}5 \times 1 \times 3{,}0 \times 10^4 = 1{,}5 \times 10^4\ \mathrm{Hz/rad}.$$

Côté pulsation :

$$H_{ol,\omega} = K_D\, K_f\, K_{0\omega} = 0{,}5 \times 1 \times 1{,}88495 \times 10^5 \approx 9{,}42478 \times 10^4\, \frac{\mathrm{rad/s}}{\mathrm{rad}}.$$

> Remarque : le transfert de boucle ouverte complet (modèle **phase**) inclut l'intégrateur *1/p* du VCO et devient sans dimension. Ici on vous demande la **constante DC**.

(c) Tension de commande du VCO V_0 (sortie du filtre)

$$V_0 = \frac{\Delta f_{\mathrm{OUT}}}{K_{0f}} = \frac{10{,}000}{30{,}000} = \boxed{0{,}333\ldots\ \mathrm{V}}\ (\approx 0{,}333\ \mathrm{V}).$$

(Contrôle : $V_0 = \Delta\omega_{\mathrm{OUT}}/K_{0\omega} = (2\pi \cdot 10\ \mathrm{kHz})/(2\pi \cdot 30\ \mathrm{kHz}) = 1/3\ \mathrm{V}$.)

(d) Tension de sortie du détecteur de phase V_D

Avec $K_f = 1$ (gain DC unitaire du filtre), la sortie du filtre égale la valeur moyenne issue du détecteur :

$$\boxed{V_D = V_0 \approx 0{,}333\ \mathrm{V}}.$$

(e) Erreur de phase statique $\varphi_e = \varphi_{\mathrm{in}} - \varphi_{\mathrm{out}}$

Détecteur sinusoïdal : $V_D = K_D \sin\varphi_e$. Donc

$$\sin\varphi_e = \frac{V_D}{K_D} = \frac{0{,}333}{0{,}5} = \frac{2}{3} \implies \boxed{\varphi_e = \arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 0{,}730\ \mathrm{rad} \approx 41{,}8^\circ}.$$

> Linéarisation (petite erreur) : $\varphi_e \approx V_D/K_D = 0{,}667\ \mathrm{rad}$ ($\approx 38{,}2^\circ$).
> Ici la forme sinusoïdale est plus fidèle.

f) Plage de verrouillage — *lock range* (cas limité par le détecteur de phase)

Étape 1 — modèle linéarisé autour de 0

- Détecteur sinusoïdal ≈ multiplicateur (linéarisé) :
  $V_D \approx K_D\,\varphi_e$.
- Filtre passe-bas passif : $|F(j0)| = 1 \Rightarrow V_0 = V_D$.
- VCO : $\Delta\omega = K_{0\omega}\,V_0$ avec $K_{0\omega} = 2\pi\,K_{0f}$.

Étape 2 — Valeur limite de l'erreur de phase

- En régime verrouillé, on reste sur la pente positive du détecteur ; on admet la borne
  $|\varphi_e|_{\max} = \pi/2$.
- Donc $V_{0,\max} = V_{D,\max} = K_D\,|\varphi_e|_{\max} = (\pi/2)\,K_D$.

Étape 3 — Expression de la plage de verrouillage

$$\boxed{\Delta\omega_{\mathrm{lock}} = K_{0\omega}\,V_{0,\max} = \frac{\pi}{2}\,K_D\,K_{0\omega}} \qquad [\mathrm{rad/s}]$$

$$\boxed{\Delta f_{\mathrm{lock}} = \frac{\Delta\omega_{\mathrm{lock}}}{2\pi} = \frac{\pi}{2}\,K_D\,K_{0f}} \qquad [\mathrm{Hz}]$$

Étape 4 — Calcul numérique (données de l'exercice)

$$K_D = 0{,}5\ \mathrm{V/rad}, \quad K_{0f} = 30\ \mathrm{kHz/V}, \quad K_{0\omega} = 2\pi \cdot 30{,}000 = 188\,495{,}56\ \mathrm{rad/(V \cdot s)}.$$

- En pulsation :

$$\Delta\omega_{\mathrm{lock}} = \frac{\pi}{2} \times 0{,}5 \times 188\,495{,}56 = \boxed{148\,044{,}07\ \mathrm{rad/s}}.$$

- En fréquence :

$$\Delta f_{\mathrm{lock}} = \frac{\pi}{2} \times 0{,}5 \times 30\,000 = \boxed{23\,561{,}94\ \mathrm{Hz}} \approx \boxed{23{,}56\ \mathrm{kHz}}.$$

Étape 5 — Intervalle de verrouillage autour de f_0 et de ω_0

- $f_0 = 200\ \mathrm{kHz}$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1\,256\,637{,}06\ \mathrm{rad/s}$.
- En fréquence :

$$\boxed{[\,f_0 - \Delta f_{\mathrm{lock}},\ f_0 + \Delta f_{\mathrm{lock}}\,] = [\,176{,}44\ \mathrm{kHz},\ 223{,}56\ \mathrm{kHz}\,]}.$$

- En pulsation :

$$\boxed{[\,\omega_0 - \Delta\omega_{\mathrm{lock}},\ \omega_0 + \Delta\omega_{\mathrm{lock}}\,] = [\,1{,}108\,592{,}99,\ 1{,}404\,681{,}13\,]\ \mathrm{rad/s}}.$$

Étape 6 — Vérification du maintien du verrouillage

L'écart demandé par l'entrée vaut $|f_{\mathrm{IN}} - f_0| = |210 - 200| = 10\ \mathrm{kHz}$.
Or $10\ \mathrm{kHz} < \Delta f_{\mathrm{lock}} \approx 23{,}56\ \mathrm{kHz}$ ⇒ **la PLL reste verrouillée**.

(Contrôle utile : tension requise V_0 pour suivre $+10\ \mathrm{kHz}$:
$V_0 = \Delta f / K_{0f} = 10{,}000/30{,}000 = 0{,}333\ \mathrm{V}$.
Borne de linéarisation du détecteur : $V_{0,\max} = (\pi/2)K_D = 0{,}785\ \mathrm{V}$.
On a bien $0{,}333 < 0{,}785$ ⇒ pas de limitation côté détecteur.)

> **Conclusion** : avec la définition de la diapo (modèle linéarisé, $\varphi_{e,\max} = \pi/2$), la **plage de verrouillage** est ±23,56 kHz (±148 044 rad/s). L'entrée à 210 kHz se situe dans cette plage : la boucle fonctionne correctement et maintient le verrouillage.